Matematika-tudománytörténeti (axiomatika-történeti) gondolatok

Van egy fordulat, egy fordulópont a matematika történetben, amit ritkán tesznek szóvá, pedig igen fontos szemlélet-alakító az ismerete. A magam részéről Szabó Árpád 1960-61-es dolgozatában olvastam róla. Eszerint matematika tudománya ott kezdődik, amikor a matematika el tudott szakadni végleg a gyakorlattól, amit valóságnak, Platón idejében árnyékvilágnak hívtak.

Évszázadokba tellett, amíg tisztázódott, hogy a matematikától eltérően a természettudományokban az (árnyékvilági) kísérleti tényekre kell támaszkodni axiómaként, és mintegy fogalmi szerszámkészletet kell felhasználni a kísérletek kiértékelésében, a matematikát, annak a kísérletektől elzárt, de használatában bevált axiomatikus alapjaival.

A matematika tudomány mivoltának mintájára mondhatjuk azt is, hogy az induktív axiomatika kialakulásától számíthatjuk a mai értelemben vett természettudományok létét (a kísérleti, egzakt természet-tudományok létét).

Az alkimista korszak lezárultával jelent meg tehát a fogalmi megkülönböztetés a matematikai és természettudományos axiomatika között – és vele együtt a deduktív matematikai axiomatika és az induktív természettudományos axiomatika megnevezés. Hatalmas előrelépés volt. Mára szinte nem is tartjuk nyilván.

Ez a korszak azonban a természet-tudományok előretörésével visszahatott a matematikai gondolatok további letisztulásához is. A matematikában is tovább lehetett lépni az euklideszi munkán több mint másfél ezer év múltával.

Jellemző mérföldkőnek érzem a koordináta rendszer kialakulását és mindennapos használatát. A koordinátarendszerek hozták az egyenletek könnyed kezelését valamint a geometria (mértan) és algebra (számtan?) közti átjárhatóságot, a kétirányú, kölcsönös leképezés, megfelelés, transzponálás lehetőségét.

………..

Részletesebben

Érdekes olvasni a matematika történeti írásokat. A tizedes pontról, a nulláról stb.

Érdeklődő laikusként számomra meglepő módon a legérdekesebb vonatkozásokat nem a közkézen forgó matematika történeti művekből, tankönyvi fejezetekből tudtam meríteni, hanem azok hiányaiból vagy szinte elrejtetten elszórt, másodlagosként kezelt megjegyzésekből. És kellett hozzá vagy negyven év, hogy rájöjjek nem csupán az én ismereteim hiányosak, hanem az engem érdeklő vonatkozásokat „nem divat" megtárgyalni.

Például van egy fordulat, egy fordulópont a matematika történetben, amit ritkán tesznek szóvá, pedig igen fontos szemlélet-alakító az ismerete. A magam részéről Szabó Árpád 1960-61-es dolgozatában olvastam róla. Eszerint matematika tudománya ott kezdődik, amikor a matematika el tudott szakadni végleg a gyakorlattól, amit valóságnak, Platón idejében árnyékvilágnak hívtak.

Ez az elszakadás érlelte ki a bizonyítási logikát, ez tette lehetővé az érett axiomatikus technikát (axiómákra támaszkodó érvelés, bizonyítás) Euklidesz művében. Tehát végső soron a többszáz éves görög filozófiai erőfeszítéseknek köszönhető, hogy a matematika tudománya

„elindult”. Ezen elvi kapcsolat (filozófia és matematika között) elhanyagoltsága ellenére ma sem szakadt meg, ma sem zárult le, mai is eleven problémákat jelent.

A matematika filozófiai-ismeretelméleti alapjaival tisztába kell kerülni valahányszor a matematika új fejezete formálódik, hogy hamis útra ne tévedjen a továbbfejlesztési, a matematika használatának további kiterjesztésére törekvő útkereső lendület.

Nagy vonalakban a görög idők után hosszú ideig a matematika mintegy tetszhalott, jégbe fagyott konzerválódott állapotba került. Szinte feledésbe ment, hogy milyen filozófiai-logikai előfeltétele volt az euklideszi axiómákra támaszkodó érvelési, fogalom-szerkesztési technikának. Máig nem közismert, vagy manapság éppen még inkább feledésbe merült, hogy a szofisztika paradigmatikus mocsarából bizonyos jól sikerült önkényes döntések vezettek ki (pld „legyen” két pont közti legkisebb távolság az egyenes).

Nagy előrelépés volt kb évezreddel később a skolasztikában aquinói szent Tamás nevével fémjelzett, ám a tüzetesebben kutakodók, például Mikola Sándor szerint egy egész skolasztikus nemzedék vitájának köszönhető logika-elméleti fejlemény. Az érvelési technikák szinte periodikus táblázatát alakították ki több mint kétszáz, egymástól elválasztott, egymással be nem helyettesíthető ha …. akkor érvelési módozatot megjelölve.

Ha komolyan vesszük hogy a matematika tudományának létrejötte a matematikának az akkor még árnyékvilágnak is mondott valóságtól való sikeres (tehát nem csupán kijelentett, hanem működőképes, jól használható eredményre vezető) elszakadásával fémjelezhető, azaz a végül is az önkényesen, de alapos megfontolást követően kijelölt axiómákra és a belőlük kiinduló érvelési logikákra való támaszkodás elfogadásával, akkor érthetővé is válik ennek a valóságtól való elszakadásnak a „visszafordíthatatlansága”.

A logikai eszközöket az axiomatikus érvelésekben elhagyhatatlanul fel kell használni, ezt senki nem vitatta. Tehát a skolasztikusok logikai eredményei a matematika történet fejezetének tekinthetők (nem szokás hangsúlyozni).

A következő nagy korszakhatár a természettudományok alkimista korszakának lezárultához köthető. Az alkimisták a skolasztikus ugyancsak ritkán értékelt törekvéséből indultak ki, hogy a valóságot meg kell ismerni, „modellezni kell”. Úgy a kísérletekkel mint olykor igen nyakatekert, nehezen követhető okfejtésekkel kell a valóság ismeretére jutni – a cselekvőképesség tágítása érdekében. A kísérletek tulajdonképpen az elméleti okoskodások ellenőrzéseként, próbájaként, alkalmazásaként is szolgáltak kimondva-kimondatlanul.

Egy homályos pontja, gyengéje volt ezeknek a törekvéseknek. Nem tudták biztosan kezelni, hogy milyen axiómákból kell kiinduljanak. A mintaként szolgáló matematikában hajdan az önkényesen kijelölt ideákból (például a matematikai pont) való kiindulás vezetett sikerre. A skolasztikát követő alkimisták idején nem volt világos, hogy a természettudományokban, vagy másként fogalmazva a kísérletező, tapasztalati tudományokban mikre kell építeni mint kiindulási axiómákra (az ideákból kikanyarodó hosszú, bonyolult érvelések nem vezettek az árnyékvilági valóság természettudományos megismerésére).

Évszázadokba tellett, amíg tisztázódott, hogy a matematikától eltérően a természettudományokban a kísérleti tényekre kell támaszkodni axiómaként, és mintegy fogalmi szerszámkészletet kell felhasználni a kísérletek kiértékelésében, a matematikát, annak a kísérletektől elzárt, de használatában bevált axiomatikus alapjaival.

A skolasztikusok ugyanis logikai eredményeik ellenére vagy éppen azoknak köszönhetően szinte kijelölték a valóság feltérképezésének feladatát. Kísérleti tapasztalataik elméleti rendezéséhez megfelelő fogalmi eszköztár azonban hiányzott (nem éreztek rá, hogy a természettudományokban mi és miként kezelhető axiómaként). Az áttörést Galilei korában a természettudományok tapasztalati tudásának és a bármi módon megformálódott teóriák egyeztetésének axiomatikus módszere jelentette. Ez hiányzott korábban, ennek volt hiányában az alkímia korszaka.

Az alkimista korszak lezárultával jelent meg tehát a fogalmi megkülönböztetés a matematikai és természettudományos axiomatika között – és vele együtt a deduktív matematikai axiomatika és az induktív természettudományos axiomatika megnevezés. Hatalmas előrelépés volt. Mára szinte nem is tartjuk nyilván.

A matematika tudomány mivoltának mintájára mondhatjuk azt is, hogy az induktív axiomatika kialakulásától számíthatjuk a mai értelemben vett természettudományok létét (a kísérleti, egzakt természet-tudományok létét).

Ez a korszak azonban a természet-tudományok előretörésével visszahatott a matematikai gondolatok további letisztulásához is. A matematikában is tovább lehetett lépni az euklideszi munkán több mint másfél ezer év múltával.

A számtanból, számítás fogalmából kiindulva a mai matematikát a legtöbben számítás technikának tekintik ceruzával, tollal, géppel végezve. Ez nem azonos az alkalmazott matematikával. Az alkalmazott matematika a kész algoritmusokat használja. Az újabb és újabb algoritmusokat kidolgozó matematikai kutatás ugyan eltéved a matematikai axiómák világának átrendezéséig - azt mintegy ösztönösen végzi az axiomatika jelentőségének, szerepének megfogalmazása nélkül.

El kell válasszuk a matematikában a számítástechnikát bármiféle eszközzel végezve (ami a görögök előtt is volt már sok ideje) a matematikai absztrakció természetének vizsgálatától, kezelésétől. A számításokat a matematikai absztrakciók eredményeként adódó fogalmakkal végezhetjük. A matematikai fogalmakat megalkotó absztrakciók helyes útjának megtalálása volt a görög filozófia nagy eredménye sok évszázad szellemi erőfeszítése árán.

Mivel találkozhatunk, ha a jelenkorhoz közelítve keressük a matematikai absztrakció újabb és újabb korszakának eredményeit?

Jellemző mérföldkőnek érzem a koordináta rendszer kialakulását és mindennapos használatát. A koordinátarendszerek hozták az egyenletek könnyed kezelését valamint a geometria (mértan) és algebra (számtan?) közti átjárhatóságot, a kétirányú, kölcsönös leképezés, megfelelés, transzponálás lehetőségét.

Geometriában hogyan lehet megfogalmazni a koordinátageometria lényegi újdonságát? Számomra Euklidesz onnan válik érthetővé, ha a Elemek első sorát olvasom, és abból próbálok kiindulni. A pont ami tovább nem osztható. Eléggé hiányos definíció a mai fül számára, de nem téves.

Adva van tehát egy Platón ideavilágába illő fogalom az eszmei, az idea jellegű pont. Egy totális idea jellegű absztrakció, ami a valóságban egyáltalán nincsen. Egy üres, tovább nem osztható, kiterjedés nélküli anyagtalan fikció. És erre az egyetlen fogalomra épül kimondva-kimondatlanul a teljes klasszikus (és mai) geometria.

Na és a koordináta geometria? A koordináták alapfogalma szintén egy pont, csakhogy egy önkéntesen kiválasztott, megnevezett pont, különlegesnek nevezett pont, amelyhez viszonyítom az ugyancsak idea természetű tér összes más ugyancsak idea jellegű pontját. Ez a különbségtevés Euklidesznél nem található. Tehát kiragadok a tér végtelen mennyiségű összes pontjából egyet (0-pont) és ahhoz viszonyítom a többit. Egyelőre logikailag egyetlen egy módon, a távolságot megadva.

Ha alakzatot építek a kiválasztott ponthoz viszonyítva az őt körülvevő térbe, akkor megadhatom az alakzat pontjainak távolságát a kiválasztott „0-ponthoz”, valamint az alakzat egyes pontjaiból a 0-ponthoz húzott egyenesek egymással bezárt szögeit. Tehát a távolságot leszámítva a mértani (geometriai) alakzat pontjait egymáshoz képest lehet meghatározni egy valamifajta segéd-ismeretlen illetőleg segéd-információ, segéd-adat felhasználásával.

Nemkülönben mint Euklidesznél, ahol még nem volt térbeli kiválasztott pont, amihez a távolságot vagy a szögeket lehetett volna meghatározni, tehát a mértani alakzatokat alkotó pontokat az alakzaton belül egymáshoz képest lehetett meghatározni (még nélkülözve a 0-ponthoz viszonyító segéd-információkat).

Ha a kiragadott pontra tengelyeket fektetek, ugyancsak önkényesen kiválasztva illetve kijelölve és önkényesen meghatározott tulajdonságokkal felruházva (például egyenletes, azaz lineáris vagy nem lineáris, mondjuk logaritmikus osztással ellátva), akkor a kiválasztott középponttól mért távolság mellett vagy helyett a tengelyekhez viszonyított távolság, esetleg valamilyen hajlásszög határozhatja meg a geomteriai alakzat pontjainak helyzetét. És ez már merőben új korszak, merőben új számítási lehetőség.

Tágabb következményként a geometriai pontok kezelésében a közmegegyezés változása, komplexebbé válása, azaz a geometriai absztrakciós módszer új elemmel való kibővülése vezetett az algebrai egyenletekkel való számolás kiteljesedéséhez. Az axiomatika történetből kiindulva, azt szem előtt tartva tehát az egyenletekkel való számolás nem az algebra önálló fejleménye, hanem éppenséggel a geometriai abszrtakció egy fejleményének a következménye.

Ez a megközelítés (tehát az axiomatikus technika axióma alapjainak, közmegegyezéses alapjainak átrendeződése, bővülése) tenné a matematikát és természettudományos alapokat az átlag józan ember számára áttekinthetővé, egyszerűvé, befogadhatóvá.

A koordináta rendszer tehát plusz absztrakciós sajátosságokat jelent a klasszikus korszak matematikájához képest. És ezzel elindult, felgyorsult egy olyan folyamat, melynek során az a bizonyos közmegegyezés, amit Arisztotelesz már az axiomatikus fogalmi rendszer előfeltételeként nevezett meg, a közmegegyezés egyre bonyolultabb, egyre többrétegűbb lett, céljaiban és eszközeiben egyre komplexebbé vált.

Hiszen például az idealisztikus matematikai térben kijelölni egy pontot, más szóval a valóságban nem létező egyéb pontok végtelenségéből kiemelni egyet és azt elfogadni, annak sajátos, a többi ponthoz képest különleges természetét belátni, a közmegegyezés igazodását feltételezi egy logikai lehetőséghez (a lehetőség felismeréséhez, kihasználásához). Nem tényhez, hanem egy módszertani lehetőséghez. Nem tényhez, hanem egy az ideák világában végrehajtott elkülönítéshez, amely jelentőségében a még Arisztotelesz előtt vázolt kétértékű logika megfogalmazásához fogható (amire már Arisztotelesz építhetett).

A matematika mind újabb fejezetei a közmegegyezéses alapokat rendezik át, bővítik ki egyre újabb elemekkel,megfontolásokkal. Az áttekintés a matematika egyre újabb ágai között ezen közmegegyezési alapok áttekintése, rendszerezése, elemzése nélkül lehetetlen.

A modern kor oktatása igen nagy kihívás elé került. Képes-e közvetíteni az újabb és újabb korosztályok felé például a matematikai alapokba foglalt „szükségszerű” közmegegyezéseket, más szóval axiomatikai alapokat? A jelek szerint ez egyáltalán nem magától értetődő. Olyannyira nem, hogy mintegy automatizmusnak fogják fel a tananyag szerkesztők a matematikai axiomatikai közmegegyezések velünk születettségét (amint a königsbergi filozófus, Kant a maga nagy magányában elképzelte ugyanezt a velünk születettséget az erkölcsi alapokról).

A kulcsszava ennek a felfogásnak napjainkban az, hogy kinek van „tehetsége” a matematikához. Biztos, hogy fontos fogalom a tehetség, de nem kell túlterhelni, mert akkor semmitmondóvá válik. El kell árulni minden nemzedéknek, hogy mik azok a fogalmi közmegegyezések, amiken alapszik általában a matematika vagy annak egyre inkább speciális, egyre több ága.

Minél szűkebb tudományterületet veszünk szemügyre, annál többrétegűbb, annál összetettebb az illető tudományterület axiomatikai alapjainak a „közmegegyezési” kiindulási alapja. A ma is közismert kifejezéssel élve: ha elfogadjuk, hogy ……, akkor abból az következik, hogy ……. Amit elfogadunk, az adott érvelés számára axiomatikai alapként tételeződik.

Összefoglalva az eddigieket matematika történetről érdemben lehetetlenség beszélni aximatika történet nélkül. Az aximatika történet pedig közmegegyezés- és logika- történetből áll (hiszen az axiomatika nem más, mint elfogadott, nem feszegetett közmegegyezés társítása a lehető legkérlelhetetlenebb logikával).

És mehetünk tovább az elemzésben. A logika sem azonos formális logikai alakzatok használatával (lehetőleg tudományáganként, tankönyvenként vagy tanulmányonként eltérő szimbolumokat használva, amik értelmét az esetek többségében nem adják meg). Lehet vitatni, hogy a legjelentősebb dokumentumokban igenis megadják a legfontosabbakat, de egy átlag érdeklődő, egyetemista, kutató, mérnök számára elérhetetlenek (ha egyáltalán léteznek) a kielégítő axiomatikai leírások (a használt axiomatikus módszer tüzetes leírása).

Nekem kapásból a közgazdaság jut eszembe, ahol érdemi axiomatörténeti munka azt hiszem egyszerűen nem létezik egyrészt, másrészt számos közgazdasági iskola mintha ezzel a bizonytalansággal vissza is élne (megideologizálva a fonák helyzetet). De matematikában, természettudományokban is hasonló a helyzet (lásd egyetemi tankönyveket, tudományos dolgozatokat). Engem érdekelne még az alkotmányjog, amit szintén aktuálpolitikától terhelten zárnak el az axiomatikus áttekinthetőségtől – feleslegesen, sok kárt okozva.

Azonban nézzük a legalapvetőbb evidenciák főbb típusait az axiomatikus fogalomhasználat bemeneteként. Vannak axiómáknak nevezett alapfogalmak, alapvető tételek és eljárások a deduktív axiomatikában (és ezek mellett alapvető tények az induktív axiomatikában).

Néha felmerül az alapelvek emlegetése már a görög időkben (alapvető fogalmak, tételek, elvek …). A felsorolás messze nem teljes, sőt elvileg nem is lehet teljes, hiszen a háttérben az emberi gondolkodás közvetlenül modellezhetetlen azaz legfeljebb közelítésekkel modellezhető teljesége áll. Ahhoz képest kell kiemelni a legteljesebb ösztönösségből a tudományok számára azon alapokat, amikre az illető tudományok teljes építménye támaszkodhat (az emberi gondolkodás teljességével összhangban, annak eszközeként ….).

Lehet modellezésnek nevezni az axiomatikát, közmegegyezésre támaszkodó, kérlelhetetlen logikával kiépített fogalmi modellnek. Ami modellként válhat a valóság részévé (az ideák, a közmegegyezésekre és valóságtényekre és elfogadást nyert ötletekre támaszkodó ideák részévé), de sosem válhat a közvetlen, „eredeti” (árnyékvilági) valósággá, vagy annak 1:1 hű törképévé, annak mintegy konkurensévé, behelyettesítőjévé.

A közmegegyezés tartósságát, terhelhetőségét hasonlíthatjuk egy ház alapjához, amelyet futóhomokra vagy sziklára építenek. Emberi alkotás elménk és a valóság közti kapcsolat kezelésében a tudományos axiomatikában.

Ezek a közmegegyezések nem véglegesek és nem tökéletesek. Olyan alapok,amelyeket a házak alapjaihoz hasonlítva épülhetnek a legerősebb sziklára is, ha a sziklát tengerár borítja el, ha a szikla egy tűzhányó oldalában van, vagy ha kőbányát nyitnak benne, vagy valami nagyobb kéregdarabon van, ami lassan alámerül a földköpenybe. Tehát viszonylagosak a gondolkodási alapok az axiomatikus rendszerek esetében. A fontosságuk pedig részint ezen viszonylagosságok közti résben, eltérésben kell érvényesüljön.

A tudományhoz nem vezet más út. Vannak sikeres és kevésbé sikeres próbálkozások.

……………….

Felmerül a beszélt hétköznapi nyelv és az axiomatika kapcsolata. Az axiomatikus érvelés nem az elnevezésektől függ, hanem a helyesen alkalmazott logikai műveletektől – valamint a természettudományokban a valóság tényleges adataitól valamint a matematikában a jól megválasztott alapfogalmaktól.

Tehát lehet használni az axiomatikának kódolt, a hétköznapi életben jelentésnélküli megnevezéseket. De hosszú távon ez zavarhoz vezet. Hosszú távon meg kell találni, hogy életérzésünkhöz, kultúránkhoz jól illeszkedő elnevezéseket használjunk – az axiomatikában is. Ezek a jó elnevezések jelentik a hidat a mi tényleges életünk és a tudományos absztrakció között.

De amíg a logika, axiomatika, deduktív és induktív szavakra nincsen a félreértést elkerülő találó magyar megfelelő, addig nem tolhatjuk el magunktól a görög gondolkodásban meglelt kifejezések használatát. Legfeljebb törekednünk kell azok eredeti történetével, használatuk eredeti indokaival tisztában lenni, amint azt Szabó Árpád írásaiban tapasztalhatjuk.

- FÁ

arpad.fay@gmail.com